Midtoets, Fouriertheorie, 01-10-03, 11.15–12.00 uur

1. Definieer de rij van functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = n, \quad n \leq x \leq n + \frac{1}{n^2}, \quad f_n(x) = 0, \quad \text{elders.}$$

   (a) Bereken de puntsgewijze limiet $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor een willekeurige $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Is hier sprake van uniforme convergentie?

   (c) Is hier sprake van gedomineerde convergentie?

   (d) Bereken $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.

2. Definieer de functie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ als de 2π-periodieke functie die voldoet aan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

   (a) Bereken $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$.

   (b) Bereken $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$ voor $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

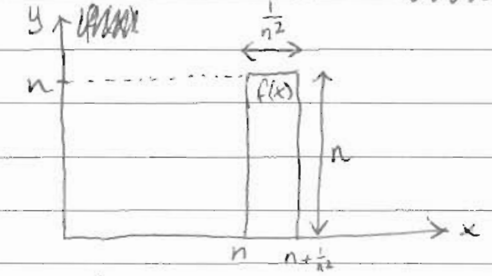
   (c) Convergeert de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ uniform in $x \in [-\pi, \pi]$?

   (d) Bereken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Werkcollegedocent: Dirk Jan Kort

1 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{als } n \leq x \leq n + \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{als } x < n \ \vee \ x > n + \frac{1}{n^2} \end{cases}$

a


$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, want voor $N = \lceil x + 1 \rceil$ geldt als $n \geq N$ dat $\underset{x<n}{}$ dus $f(x) = 0$

b Nee, $f_n(x)$ convergeert niet uniform. Voor elke $\varepsilon > 0$ is namelijk wel een N te vinden zodat $n \geq N \Rightarrow f_n(x) > \varepsilon$ voor zekere x. Neem nl. $N = \lceil \varepsilon \rceil$, dan is voor $n \geq N$ $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = n$ en $n > \varepsilon$ dus de functie valt buiten de ε-strook om 0.

c Nee, $f_n(x)$ kan weliswaar worden gedomineerd door

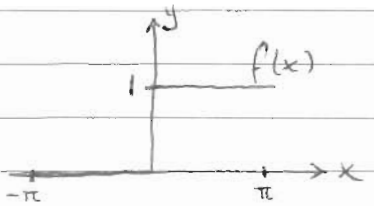
-1 $g(x) = x$, maar deze g is niet integreerbaar op $\mathbb{R}$.

(mischien is er nog wel een betere $g(x)$ te vinden)

d $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} n \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{als } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$



a $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{2}$

b $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_{x=0}^{x=\pi} =$

$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-in} e^{-in\pi} - \frac{1}{-in} e^{0} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{in} - \frac{1}{in} e^{-in\pi} \right) =$

$-\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2\pi i n} \left(1 - \cos(-n\pi) - i \sin(-n\pi) \right) = \frac{1}{2\pi i n} \left(1 - (-1)^n \right)$

$= \frac{i}{2\pi n} \left(1 - (-1)^n \right) = \ldots$

c $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \cancel{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{i}{2\pi n}(1-(-1)^n)e^{inx}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1-(-1)^n}{n}(\cos nx + i\sin nx)$

$= \sum_{n<0}(c_n e^{inx}) + c_0 + \sum_{n>0}(c_n e^{inx}) =$

$= \sum_{n<0}\left(\frac{i}{2\pi n}(1-(-1)^n)e^{inx}\right) + \frac{1}{2} + \sum_{n>0}\left(\frac{i}{2\pi n}(1-(-1)^n)e^{inx}\right) =$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \sum_{n<0}\left(\frac{i}{n}(1-(-1)^n)e^{inx}\right) + \sum_{n>0}\left(\frac{i}{n}(1-(-1)^n)e^{inx}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2\pi}\Big(\pi + \sum_{n<0}\frac{i}{n}(1-(-1)^n)(\cos nx + i\sin nx) +$

↕ gelijk voor tegengestelde n, maar $\frac{1}{n}$ zorgt voor opheffing

$\sum_{n>0}\frac{i}{n}\underbrace{(1-(-1)^n)}_{0 \text{ als } n \text{ even, } 2 \text{ als } n \text{ oneven}}(\cos nx + i\sin nx)\Big)$

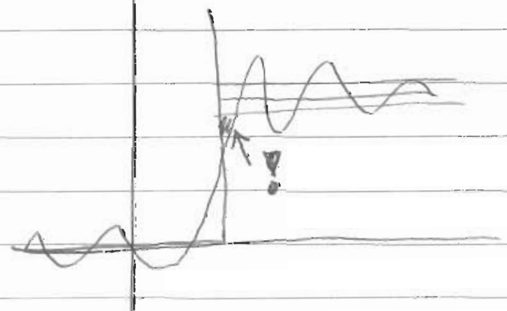
$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \sum_{n<0}\frac{i}{n}(1-(-1)^n)\, i\sin nx + \sum_{n>0}\frac{i}{n}(1-(-1)^n)\, i\sin nx\right) =$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \sum_{n<0}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx + \sum_{n>0}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx\right) =$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx\right)$

Deze zal niet uniform convergeren, want de ~~term~~ som is continu en de limiet is dat niet.

↳ had je meteen kunnen bedenken...



-1 d V